**58. ročník Fyzikálnej olympiády**
**v školskom roku 2016/2017**

***Kategória C – domáce kolo***
***Text úloh***

*Odporúčame preštudovať si podobné úlohy v publikácii*
*Čáp I., Konrád Ľ.: Fyzika v zaujímavých riešených úlohách*

## 1. *Tranzit Merkúra cez slnečný kotúč*

Slnečná sústava pozostáva zo Slnka ako centrálneho telesa a planét.

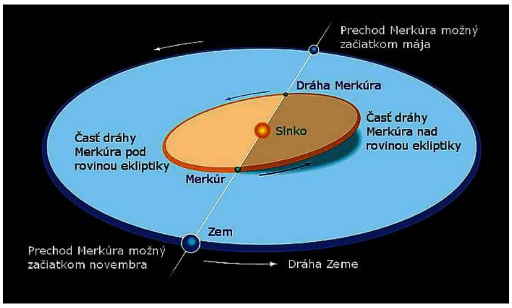
a) Zostavte tabuľku s riadkami zodpovedajúcimi ôsmim planétam Slnečnej sústavy a stĺpcami, do ktorých pomocou fyzikálnych tabuliek alebo internetu doplňte: dobu obehu $T_p$ planéty okolo Slnka, hmotnosť $M_p$ a polomer $R_p$ planéty a hlavnú polos $a_p$ orbitálnej trajektórie planéty. Z hmotnosti a polomeru planét určte ich strednú hustotu $\rho_p$. V tabuľke označte planéty s najväčšou hmotnosťou, s najväčším polomerom, najväčšou a najmenšou priemernou hustotou.

b) Určte uhly $\varphi$, pod ktorým sa javia planéty zo Zeme pri maximálnom možnom priblížení planét k Zemi. Predpokladajte, že trajektórie planét sú kružnice s polomerom $a_p$ a pohybujú sa všetky v jedinej rovine – *ekliptickej rovine*.

   Označte tri zdanlivo najväčšie planéty na oblohe.

c) Odvoďte vzťah pre dobu obehu $T$ planéty po orbitálnej trajektórii ako funkciu $a$ a hodnoty $T_{p\,\mathrm{vyp}}$ vypočítaných z údajov v tabuľke a doplňte ich do ďalšieho stĺpca tabuľky a porovnajte ich s hodnotami $T_p$. Zostrojte graf doby $T$ ako funkcie $a$. Hodnoty $T_p$ v tomto grafe označte krúžkom. Zostrojte druhý graf, v ktorom znázornite funkciu logaritmus veličín $T$, $a$, $\log T = \mathrm{f}(\log a)$. Porovnajte obidva grafy a posúďte, v čom je výhoda logaritmického grafu.

d) V máji 2016 bol zo Zeme pozorovaný prechod planéty Merkúr cez slnečný kotúč ako tmavá bodka. Rovina trajektórie Merkúra zviera s rovinou trajektórie Zeme (ekliptikou) uhol $\varphi = 7{,}0°$, obr. C−1. Dokážte, že ďalšie prechody Merkúra cez slnečný kotúč budú pozorované v novembri v rokoch 2019, 2023 a 2039 a v máji až v roku 2049. Vysvetlite, v čom je rozdielny májový a novembrový prechod.

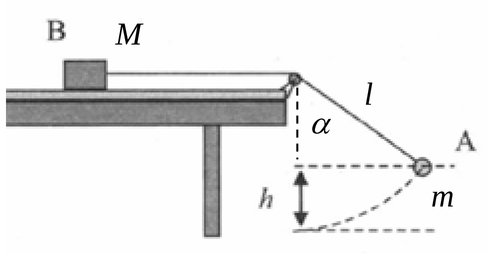



Obr. C−1

*Pozn.: Zoznámte sa s definíciou funkcie log x a jej grafickým znázornením. Hodnoty funkcie nájdete na kalkulačke.*

## 2. *Mechanická sústava*

Na obrázku C−2 je znázornená mechanická sústava, ktorú tvorí guľa A s hmotnosťou $m$, spojená niťou s hranolom B s hmotnosťou $M$ cez malú pevnú kladku s malým polomerom. Hranol je položený na vodorovnej doske stola, pričom faktor trenia medzi povrchom stola a hranolom je $f$. Dĺžka nite medzi kladkou a guľou je $l$. Na začiatku je niť medzi kladkou a guľou zvislá.



Obr. C−2

a) Nakreslite obrázok a označte v ňom sily pôsobiace na telesá sústavy hranol−kladka−guľa. Určte hraničnú hmotnosť $m_1$ gule, aby sústava bola v pokoji.
b) Určte zrýchlenie $a$ hranola, ak na zvislú niť zavesíme guľu s hmotnosťou $m_2 > m_1$. Nakreslite obrázok a označte v ňom sily pôsobiace na sústavu. Jednotlivé sily definujte.

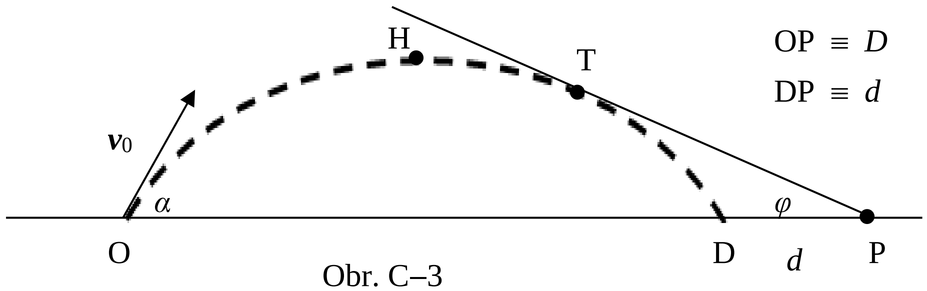
Guľu s hmotnosťou $m < m_1$ zavesíme na niť a pri napnutej niti ju vychýlime v zvislej rovine do výšky $h$, obr. C−2, a uvoľníme.

c) Určte hraničnú hmotnosť $m_3$ gule, aby pre $m < m_3$ sa hranol neposunul pri pohybe gule až do najnižšej polohy.
d) Na niť zavesíme guľu s hmotnosťou $m_4 > m_3$ a vychýlime ju pri napnutej niti do výšky $h$. Určte uhol $\alpha_1$ medzi niťou a zvislým smerom v okamihu, keď sa hranol na stole ťahom vlákna uvedie do pohybu.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty: $M = 150$ g, $l = 50$ cm, $f = 0{,}16$, $h = 25$ cm, $m_4 = 15$ g, $g = 9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.
Trenie v osi kladky neuvažujte. Niť je dokonale ohybná, neroztiahnuteľná a má veľmi malú hmotnosť.

## 3. *Hádzanie loptičky*

Učiteľ so študentmi sa vybrali na ihrisko na názornú ukážku šikmého vrhu hodom kriketovej loptičky. Stanovili bod O, z ktorého študenti hádzali loptičku, a bod P vo vzdialenosti $D$ = OP v rovine letu loptičky, z ktorého let loptičky pozorovali, obr. C–3.




Obr. C–3

Rekordér triedy hodil loptičku tak, že dopadla v bode D vo vzdialenosti $d$ od pozorovateľa, $d$ = DP. Súčasne stopkami merali dobu letu $t_D$ loptičky.

Z nameraných hodnôt potom počítali rôzne charakteristické hodnoty, ktoré nevedeli priamo zmerať.

a) Napíšte základné funkcie, ktoré vyjadrujú časovú závislosť zvislých a vodorovných zložiek rýchlosti $\boldsymbol{v}$ a polohového vektora $\boldsymbol{r}$ loptičky vzhľadom na začiatočný bod O.

b) Použitím veličín $D$, $d$, $t_D$ odvoďte vzťahy pre veľkosť $v_0$ začiatočnej rýchlosti vrhu a uhol $\alpha$ vrhu.

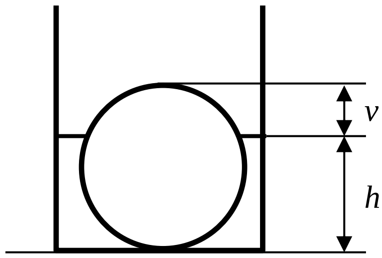
c) Odvoďte vzťah pre maximálnu výšku $h$, ktorú loptička počas letu dosiahla.

d) Určte maximálny elevačný uhol $\varphi$ vzhľadom na vodorovnú rovinu ihriska, pod ktorým pozorovateľ loptičku počas jej letu pozoroval.

e) Pre namerané hodnoty veličín $D$ = 80,0 m, $d$ = 20,0 m a $t_D$ = 2,66 s zostrojte graf závislosti výšky $y$ loptičky ako funkciu jej vodorovnej súradnice $x$ vzhľadom na bod O. Do grafu zakreslite i bod P a zostrojte priamku, ktorá zodpovedá maximálnej hodnote elevačného uhla $\varphi$. Hodnoty $h$ a $\varphi$ získané z grafu porovnajte s hodnotami určenými výpočtom podľa vzťahov odvodených v častiach b) a c).

Predpokladajte, že odpor vzduchu sa neprejaví a že body O, D a P sa nachádzajú vo vodorovnej rovine povrchu ihriska. Pri výpočtoch uvažujte $g$ = 9,8 m·s$^{-2}$.

## 4. *Plávajúca guľa*




Obr. C–4

Vo vysokej valcovej nádobe s vnútorným polomerom $R = 50$ mm sa nachádza plná homogénna guľa s polomerom $r = 45$ mm a hustotou $\rho_G$. Do nádoby nalievame vodu s hustotou $\rho_V$, pričom $\rho_G / \rho_V = 0{,}90$. Keď výška $h$ hladiny vody nad dnom nádoby dosiahne výšku $h_1$, tlaková sila gule na dno nádoby klesne na nulovú hodnotu. Nad hladinou vtedy vyčnieva guľový odsek s výškou $v_1 = 2r - h_1$, obr. C–4.

a) Nakreslite obrázok znázorňujúci situáciu pre $h < h_1$, $h = h_1$ a $h > h_1$, a nakreslite sily pôsobiace na guľu.

Keďže analytické riešenie príslušnej rovnice pre $h_1$ je komplikované, použite grafickú, resp. numerickú, metódu, ktorá je jednoduchá. Dá sa realizovať pomocou vhodného počítačového programu, ale poskytuje riešenie iba pre konkrétne číselné hodnoty.

*Pozn.: Objem guľového odseku s výškou v na guli s polomerom r je*

$$V_{od} = V_G \, \frac{1}{4}\left(\frac{v}{r}\right)^2 \left(3 - \frac{v}{r}\right), \textit{ kde } v \le r \text{ a } V_G = \frac{4}{3}\pi\, r^3 \textit{ je objem gule.}$$

b) Zostrojte graf pomeru $y = V_{od}/V_G$ ako funkcie $x = v/r$.

c) S použitím grafu z časti b) určte objem $V_V$ vody, ktorú treba do nádoby naliať, aby sa dosiahla výška $h_1$ hladiny.

Potom do valca prilejeme ďalšiu vodu, aby sa objem vody vo valci zdvojnásobil, takže guľa bude vo vode plávať. Potom začneme tenkou hadičkou prilievať na hladinu vody olej s hustotou $\rho_O < \rho_G$, pričom $\rho_O / \rho_G = 0{,}95$, až kým nebude celá guľa pod hladinou oleja.

d) Určte objem $V_O$ oleja, ktorý treba priliať, aby sa vrchol gule dotýkal hladiny oleja, a výšku $h_2$ hladiny vody nad dnom nádoby v tomto prípade. Nakreslite obrázok znázorňujúci túto situáciu a zakreslite sily pôsobiace na guľu.

Predpokladajte, že olej sa s vodou nemieša a vytvorí nad hladinou vody homogénnu vrstvu.

## 5. *Kométa Hale–Bopp*

V roku 1997 bola pozorovaná jedna z najjasnejších komét z predchádzajúcich desaťročí známa pod menom *Hale–Bopp*. Astronomickými meraniami sa zistilo, že kométa sa priblížila k Slnku na najmenšiu vzdialenosť $r_1$ = 0,914 AU (astronomických jednotiek, 1 AU ≈ $1{,}496 \times 10^{11}$ m) a bodom najmenšieho priblíženia prechádzala rýchlosťou $v_1$ = 44,01 km.s$^{-1}$. Rovina trajektórie kométy bola kolmá na rovinu ekliptiky a hlavná os trajektórie zvierala s rovinou ekliptiky uhol $\varphi$ = 51,0°.

Obr. C–5

Pri priblížení k Slnku bol pozorovaný dvojitý chvost kométy.

a) Vysvetlite, prečo sa pozorovali dva chvosty kométy, obr. C–5, a ktorým smerom vzhľadom na Slnko smerovali. Využite informácie o kométe z internetu.

b) Dokážte, že ide o periodickú kométu. Určte v ktorom roku možno opäť očakávať príchod kométy a určte maximálnu vzdialenosť $r_2$ od Slnka, ktorú kométa pri svojom pohybe dosiahne.

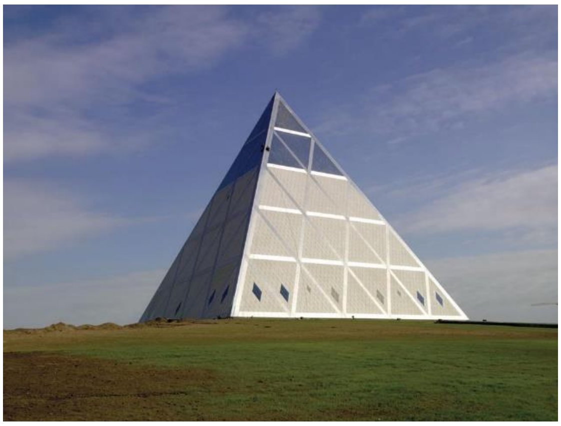
c) Nakreslite približne úsek trajektórie kométy medzi bodmi A a B, v ktorých prechádzala rovinou ekliptiky a odhadnite vzdialenosti $s_1$ = AS a $s_2$ = BS týchto bodov od Slnka. Uveďte v blízkosti orbít ktorých planét Slnečnej sústavy sa nachádzali body A a B. Bolo priblíženie kométy k orbitálnej trajektórii Zeme nebezpečné?

Potrebné hodnoty veličín vyhľadajte v tabuľkách alebo na internete. $G$ je gravitačná konštanta (Newtonova), $G = 6{,}674 \times 10^{-11}$ N·m$^2$·kg$^{-2}$, hmotnosť Slnka $M = 1{,}989 \times 10^{30}$ kg.

Na konštrukciu grafu odporúčame využiť vhodný grafický program, napr. EXCEL. S vlastnosťami elipsy sa oboznámte z literatúry. Z vypočítaných veličín veľkosti hlavnej polosi $a$ a vedľajšej polosi $b$ a pre zostrojenie trajektórie použite rovnicu elipsy $y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, kde $x$, $y$ sú súradnice bodov elipsy v pravouhlej súradnicovej sústave, ktorej začiatok je stred elipsy. Hlavná a vedľajšia os elipsy je totožná s osou $x$ a $y$.

## 5. *Pyramída v Astane*

Jedným z problémov moderných budov z ocele a betónu sú deformácie a mechanické napätia spôsobené zmenami teploty. Jednou z ambicióznych moderných stavieb je pyramída zo skla a ocele *Palace of Peace and Reconcilliation – Palác mieru a zmierenia* v Astane, hlavnom meste Kazachstánu.

Obr. C–6

Pyramída s výškou $h$ = 62 m pri teplote 0 °C má dĺžku strany štvorcovej základne $a$ = 62 m a nachádza sa na betónovej doske s hrúbkou $d$ = 15 m. Základom stavby je oceľová konštrukcia, ktorá je vyplnená rovnakými trojuholníkovými sklenenými platňami, obr. C–6. Teplota v Astane sa behom roku mení od 40 °C v lete do – 40 °C v zime.

a) Aby nedošlo k praskaniu sklenenej výplne, zodpovedajú rozmery sklenených platní rozmerom oceľových rámov pri teplote $t_1$ = – 40 °C. Pri zvýšení teploty vzniká medzi sklenenou platňou a oceľovým rámom medzera. Určte veľkosť $c_1$ medzery, ktorá vzniká medzi horným okrajom sklenenej tabule a oceľovou konštrukciou pri zvýšení teploty na $t_2$ = 40 °C. Sklo sa dolným okrajom opiera o oceľovú konštrukciu.

b) Určte rozdiel $\Delta h$ výšky pyramídy medzi uvedenými extrémnymi teplotami $t_1$ a $t_2$.

Pyramída sa nachádza na vodorovnej betónovej platni. Aby nedošlo k vzniku nežiaduceho mechanického napätia v konštrukcii, je pyramída ukotvená v betónovej platni iba v jednom vrchole podstavy a zvyšok podstavy sa môže pozdĺž platne hladko posúvať.

c) Určte rozsah $c_2$ pohybu protiľahlého vrcholu podstavy pyramídy vzhľadom na betónovú dosku pri zmene teploty medzi hodnotami $t_1$ a $t_2$.

Keby bola celá podstava pyramídy pevne ukotvená v betónovej doske, dochádzalo by pri zmenách teploty v podstave pyramídy k vzniku nežiaducich mechanických napätí. Základnú predstavu si možno urobiť pomocou jednoduchého modelu. Uvažujte vodorovný homogénny oceľový nosník s dĺžkou $a$ a obsahom prierezu $S_0$ = 0,10 m$^2$, ktorý je koncami pevne ukotvený v betónovej platni pri teplote $t_0$ = 0 °C.

d) Určte silu $\boldsymbol{F}$, ktorou na seba vzájomne pôsobia oceľový nosník a betónová platňa vo vodorovnom smere v miestach ukotvenia nosníka do betónu pri teplotách $t_1$ a $t_2$. Určte tlakové mechanické napätie $\sigma$ na ploche $S_0$ dotyku hlavy nosníka a betónu. Výsledok porovnajte s pevnosťou betónu a ocele. Pri riešení tejto časti úlohy predpokladajte, že zmena rozmerov betónovej dosky, a tým aj dĺžka oceľového nosníka, v dôsledku pôsobenia mechanického napätia je zanedbateľne malá.

Predpokladajte, že v každom uvažovanom prípade je teplota celej konštrukcie vrátane základnej betónovej dosky rovnaká.
Koeficienty dĺžkovej teplotnej rozťažnosti ocele $\alpha_1 = 13\times10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$, skla $\alpha_2 = 9{,}0\times10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$ a betónu $\alpha_3 = 10\times10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$, modul pružnosti v ťahu ocele $E = 200\ \mathrm{GPa}$, pevnosť ocele $\sigma_\mathrm{o} = (400 \div 1\,000)\ \mathrm{MPa}$, pevnosť betónu v tlaku $\sigma_\mathrm{b} = (20 \div 50)\ \mathrm{MPa}$.
*Pozn.: Palác plní funkciu kultúrneho, kongresového a spoločenského centra (opera s 1500 sedadlami, národné múzeum kultúry, knižnica, výskumné centrum, nová „univerzita civilizácie“).*

## 7. ***Ladenie kyvadla –*** *Experimentálna úloha*


Obr. C–7

V hodinách, obr. C–7, sa používa kyvadlo, ktoré pozostáva z tyče zavesenej za horný koniec, na ktorej v dolnej časti sa nachádza závažie – posuvný disk. Posúvaním disku po tyči sa mení doba kyvu kyvadla a tým sa nastavuje rýchlosť chodu hodín.

V experimentálnej úlohe skúmajte vplyv polohy závažia na dobu kyvu kyvadla.

1. úloha – návrh a konštrukcia kyvadla

Doba kyvu kyvadla tvoreného tyčou s dĺžkou $L$ a hmotnosťou $M$ a závažím s hmotnosťou $m$ upevneným vo vzdialenosti $l$ jeho ťažiska od osi otáčania.

Doba kyvu kyvadla

$$T = T_0 \sqrt{\frac{M L^2 + 3ml^2}{L(ML + 2ml)}}, \text{ kde } T_0 = \pi \sqrt{\frac{2L}{3g}} \qquad (1)$$

je doba kyvu samotnej tyče bez závažia.

Tieto vzťahy odvoďte.

Odrežte tyč s dĺžkou L = (60 ÷ 70) cm a na jednom konci umiestnite os otáčania kolmú na plochú stranu tyče. Odmerajte dĺžku tyče $L$ a hmotnosť $M$ tyče. Na reguláciu doby kyvu zvoľte vhodné malé závažie s hmotnosťou $m \sim 1/10\, M$. Určite hmotnosť $m$ závažia.

Vypočítajte hodnotu $T_0$ podľa vzťahu (1). Odmerajte dobu $T_0$ tyče bez závažia a obidve hodnoty porovnajte. Prípadný rozdiel hodnôt zdôvodnite.

Pre hodnoty $M$, $m$, $L$ a $T_0$ zostrojte graf doby kyvu $T$ ako funkcie pomeru $l / L$ pre rozsah $0 < l / L < 1$.

2. úloha – „ladenie“ kyvadla

Na tyč upevnite závažie, napr. gumičkou alebo prúžkom izolepy. Postupne posúvajte závažie po tyči. Pre každú polohu závažia odmerajte vzdialenosť $l$ ťažiska závažia od osi otáčania a odmerajte čo najpresnejšie dobu kyvu $T$. Meranie urobte pre 10 polôh závažia. Namerané hodnoty zapíšte do tabuľky a výsledky merania zakreslite do grafu teoretickej závislosti doby kyvu $T$ od pomeru $l / L$.

Porovnajte krivku teoretickej závislosti s krivkou prechádzajúcou cez namerané body a prípadné rozdiely vysvetlite.

3. úloha – posúdenie presnosti merania

Pre každé realizované meranie určte presnosť merania a vyjadrite ju v tvare intervalu hodnovernosti, napr. $m = (20{,}0 \pm 0{,}5)$ g. Odhadnite presnosť hodnoty $T_0$ určenej výpočtom a meraním.